Krótkie wprowadzenie do funkcji Greena w fizyce:
Pojęcie jednocząstkowej funkcji Greena

Mariusz Adamski

1 Twierdzenie Greena

Zgodnie z twierdzeniem Gaussa[1]

$$\oiint_S \bar{F} \cdot \mathrm{d}\bar{S} = \iiint_V \mathrm{d}^3 r' \nabla' \bar{F}(\bar{r}'),$$

gdzie V jest objętością zamkniętą wewnątrz powierzchni S. Jeśli wybrać

$$\bar{F} = U\nabla' G - G\nabla' U,$$

dostaniemy:

$$\oiint_S (U\nabla' G - G\nabla' U) \cdot \mathrm{d}\bar{S} = \iiint_V \mathrm{d}^3 r' (U\nabla'^2 G - G\nabla'^2 U),$$

co jest treścią twierdzenia Greena.

Jeśli $\nabla'^2 U(\bar{r}') = f(\bar{r}')$ oraz $\nabla'^2 G(\bar{r} - \bar{r}') = \delta(\bar{r} - \bar{r}')$ to z twierdzenia Greena

$$U(\bar{r}) = \iiint_V \mathrm{d}^3 r' f(\bar{r}') G(\bar{r} - \bar{r}') + \oiint_S (U\nabla' G - G\nabla' U).$$

Druga całka znika, jeśli funkcje U i G są równe 0 na powierzchni S. Funkcja G jest nazywana funkcją Greena.

Tożsamość ta została uogólniona dla dowolnych operatorów różniczkowych $\hat{D}$, tak że rozwiązaniem każdego równania postaci

$$\hat{D} U(\bar{r}) = f(\bar{r})$$

jest

$$U(\bar{r}) = \iiint \mathrm{d}^3 r' f(\bar{r}') G(\bar{r} - \bar{r}')$$

o ile $\hat{D} G(\bar{r} - \bar{r}') = \delta(\bar{r} - \bar{r}')$ i funkcje U i G znikają na brzegach obszaru całkowania.

2 Funkcja Greena cząstki swobodnej

Równanie Schrödingera cząstki swobodnej

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \imath \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(\bar{r}, t) = 0$$

na mocy powyższych rozważań prowadzi do

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \imath \frac{\partial}{\partial t} \right) G(\bar{r} - \bar{r}'; t - t') = \delta(\bar{r} - \bar{r}') \delta(t - t').$$

Wprowadzając transformatę Fouriera funkcji G

$$G(\bar{r} - \bar{r}'; t - t') = \iiint \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} e^{\imath \bar{k}(\bar{r} - \bar{r}')} G(\bar{k}; t - t')$$

[1] Oryginalne rozumowanie George'a Greena biegło w istocie nieco innym torem, gdyż prawdopodobnie nie znał on twierdzenia Gaussa. Przedstawione rozumowanie ma na celu pokazanie ekwiwalentności twierdzeń Greena i Gaussa (które jest zapewne lepiej znane).

możemy powyższe równanie przepisać jako

$$\iiint \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} e^{\imath\bar{k}(\bar{r}-\bar{r}')}\Big(-\underbrace{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}}_{\varepsilon_k} + \imath\frac{\partial}{\partial t}\Big)G(\bar{k};t-t') = \delta(\bar{r}-\bar{r}')\delta(t-t').$$

Biorąc teraz transformatę Fouriera obu stron równania dostaniemy

$$\left(-\varepsilon_k + \imath\frac{\partial}{\partial t}\right)G(\bar{k};t-t') = \delta(t-t').$$

Równanie to spełniają dwie funkcje

$$\begin{aligned} G_0^R(k,t-t') &= \imath\theta(t-t')e^{-\imath\varepsilon_k(t-t')} \quad \text{(retardowana)},\\ G_0^A(k;t-t') &= -\imath\theta(t'-t)e^{-\imath\varepsilon_k(t-t')} \quad \text{(adwansowana)}. \end{aligned}$$

3 Funkcja Greena cząstki w polu sił zewnętrznych

Wprowadzając zaburzenie w postaci potencjału $V(\bar{r})$

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - V(\bar{r}) + \imath\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(\bar{r},t) = 0$$

oraz jego transformatę Fouriera

$$V(\bar{r}) = \iiint \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} e^{\imath\bar{k}\bar{r}} V(\bar{k}),$$

dostajemy

$$\begin{aligned} \iiint \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} e^{\imath\bar{k}\bar{r}} \left(-\varepsilon_k - V(\bar{k}) + \imath\frac{\partial}{\partial t}\right)G(\bar{k},t-t') &= \delta(\bar{r}-\bar{r}')\delta(t-t')\\ \left(-\varepsilon_k - V(\bar{k}) + \imath\frac{\partial}{\partial t}\right)G(\bar{k},t-t') &= \delta(t-t'). \end{aligned}$$

Po odjęciu stronami równania $\left(-\varepsilon_k + \imath\frac{\partial}{\partial t}\right)G_0(\bar{k};t-t') = \delta(t-t')$ otrzymamy

$$\left(-\varepsilon_k + \imath\frac{\partial}{\partial t}\right)\big(G(\bar{k};t-t') - G_0(\bar{k};t-t')\big) = V(\bar{k})G(\bar{k};t-t')$$

Oczywiście funkcją Greena tego równania jest funkcja G_0, więc na mocy twierdzenia Greena

$$G(\bar{k};t-t') - G_0(\bar{k};t-t') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'' G_0(\bar{k};t-t'-t'')V(\bar{k})G(\bar{k};t'');$$

podstawiając $t'' := t'' - t'$

$$G(\bar{k};t-t') = G_0(\bar{k};t-t') + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'' G_0(\bar{k};t-t'')V(\bar{k})G(\bar{k};t''-t'),$$

co jest równaniem typu Dysona[2].

Iterując to równanie dostajemy perturbacyjne rozwinięcie funkcji G:

$$\begin{aligned} G(\bar{k};t-t') = G_0(\bar{k};t-t') &+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'' G_0(\bar{k};t-t'')V(\bar{k})G_0(\bar{k};t''-t')\\ &+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'' \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t''' G_0(\bar{k};t-t'')V(\bar{k})G_0(\bar{k};t''-t''')V(\bar{k})G_0(\bar{k};t'''-t') + ... \end{aligned}$$

[2]Gdyby tylko utożsamić transformatę Fouriera potencjału $V(\bar{k})$ z częścią energii własnej (*self-energy part*).