Oscylacje Rabiego

opracował: Mariusz Adamski

Załóżmy, że mamy układ dwustanowy o stanach $|0\rangle$ i $|1\rangle$, takich że:

$$\begin{aligned} \hat{H}_0|0\rangle &= E_0|0\rangle \\ \hat{H}_0|1\rangle &= E_1|1\rangle. \end{aligned}$$

Zakładamy ponadto, że stany te są ortonormalne, tj. $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$. Wprowadzamy zmienne w czasie i wzdłuż osi x zaburzenie w postaci potencjału:

$$\hat{H}' = -x\mathscr{E}\cos\omega t = -\frac{1}{2}x\mathscr{E}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}).$$

Ponieważ stany własne niezaburzonego hamiltonianu stanowią bazę przestrzeni Hilberta, funkcję falową możemy zapisać w postaci ich superpozycji

$$|\psi\rangle = a_0(t)|0\rangle + a_1(t)|1\rangle,$$

gdzie cała nietrywialna zależność czasowa jest zawarta teraz w funkcjach a_0 i a_1 (jest to znana metoda uzmienniania stałych).

Aby dowiedzieć się, jak będzie wyglądała ewolucja stanu $|\psi\rangle$ pod wpływem takiego zaburzenia, musimy rozwiązać równanie Schrödingera

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle.$$

Oczywiście $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$; podstawiając $|\psi\rangle$ do lewej strony równania, dostajemy:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(a_0|0\rangle + a_1|1\rangle) = i\hbar\dot{a}_0|0\rangle + i\hbar\dot{a}_1|1\rangle + a_0E_0|0\rangle + a_1E_1|1\rangle,$$

gdzie pochodną czasową oznaczyliśmy kropką; pamiętaliśmy również o trywialnej ewolucji stanów stacjonarnych (czynnik $e^{-iEt/\hbar}$). Wstawiając teraz $|\psi\rangle$ do prawej strony równania mamy:

$$(\hat{H}_0 + \hat{H}')(a_0|0\rangle + a_1|1\rangle) = a_0E_0|0\rangle + a_1E_1|1\rangle + a_0\hat{H}'|0\rangle + a_1\hat{H}'|1\rangle.$$

Widzimy, że czynniki $a_0E_0|0\rangle$ oraz $a_1E_1|1\rangle$ występują po obu stronach i się uproszczą.

Domnażając teraz otrzymane równanie z lewej strony kolejno przez $\langle 0|$ i $\langle 1|$, otrzymamy dwa sprzężone równania na funkcje a_0 i a_1. Zanim to zrobimy, zauważmy jeszcze, że jeśli założymy izotropię zagadnienia, to diagonalne elementy macierzowe $\hat{H}'$ powinny zniknąć; jedyną zmienną przestrzenną jest tu x, więc elementy te w istocie odpowiadają diagonalnym elementom macierzowym operatora momentu dipolowego. Jeśli czytelnik nie czuje się przekonany powyższym argumentem, przygotowaliśmy inny: x jest funkcją nieparzystą, zatem mnożąc go przez $\phi^*\phi$ (parzysta[1]) otrzymujemy funkcję nieparzystą w x; całka funkcji nieparzystej po symetrycznym przedziale znika. Istotnym jest tutaj założenie, że całkę po d^3r daje się zapisać jako całkę iterowaną (więc założenie izotropii jest tu warunkiem wystarczającym).

Mając powyższe na względzie, możemy zapisać

$$\begin{cases} i\hbar\dot{a}_0 = a_1\langle 0|\hat{H}'|1\rangle = a_1\langle 0| - \frac{1}{2}x\mathscr{E}|1\rangle(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \\ i\hbar\dot{a}_1 = a_0\langle 1|\hat{H}'|0\rangle = a_0\langle 1| - \frac{1}{2}x\mathscr{E}|0\rangle(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \end{cases}$$

Teraz, wyłuskując trywialną zależność od czasu ze stanów $|0\rangle$ i $|1\rangle$

$$\begin{aligned} |0\rangle &= |\tilde{0}\rangle e^{-iE_0t/\hbar} \\ |1\rangle &= |\tilde{1}\rangle e^{-iE_1t/\hbar} \end{aligned}$$

[1] Funkcja $\phi^*\phi$ jest funkcją gęstości stanu niezaburzonego ($|0\rangle$, $|1\rangle$), zatem z założenia izotropii, jest funkcją parzystą (prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w otoczeniu punktu x jest równe prawdopodobieństwu znalezienia jej w otoczeniu $-x$).

oraz wprowadzając oznaczenia $\omega_0 := (E_1 - E_0)/\hbar$ (częstość rezonansowa) i $s := \langle\tilde{0}| - \frac{1}{2}x\mathscr{E}|\tilde{1}\rangle$, możemy nasz układ równań przepisać jako

$$\begin{cases} i\hbar\dot{a}_0 = a_1 s(e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t}) \\ i\hbar\dot{a}_1 = a_0 s^*(e^{i(\omega+\omega_0)t} + e^{-i(\omega-\omega_0)t}) \end{cases}$$

Możemy tutaj pominąć szybkozmienne czynniki z sumą częstości i skupić się na funkcji obwiedni generowanej przez człony różnicowe.

Użyjemy teraz znanej z pewnością czytelnikowi metody „rozplątywania" sprzężonych równań różniczkowych; różniczkujemy pierwsze równanie po czasie otrzymując

$$i\hbar\ddot{a}_0 = \dot{a}_1 s e^{i(\omega-\omega_0)t} + i a_1 s(\omega - \omega_0)e^{i(\omega-\omega_0)t}.$$

Z pierwszego równania dostaniemy

$$a_1 = \frac{i\hbar\dot{a}_0}{s}e^{-i(\omega-\omega_0)t},$$

z drugiego natomiast

$$\dot{a}_1 = -ia_0\frac{s^*}{\hbar}e^{-i(\omega-\omega_0)t},$$

co prowadzi nas do równania

$$\ddot{a}_0 - i\dot{a}_0(\omega - \omega_0) + a_0\frac{|s|^2}{\hbar^2} = 0.$$

Jest to oczywiście równanie tłumionego oscylatora harmonicznego (tylko że o urojonym tłumieniu), zatem nie wdając się w szczegóły metodyki jego rozwiązywania (autor preferuje metodę funkcji próbnej) oraz zakładając warunki brzegowe $a_0(0) = 0$, $a_1(0) = 1$, przewidujemy rozwiązanie w postaci:

$$a_0(t) = \frac{s}{2\hbar\Omega}\sin\Omega t e^{i(\omega-\omega_0)t/2},$$

gdzie $\Omega = \frac{1}{2}\sqrt{(\omega-\omega_0)^2 + \frac{|s|^2}{\hbar^2}}$ to częstość oscylacji Rabiego.

Z warunku normalizacji $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$ oraz z funkcji prawdopodobieństwa

$$P_0(t) = |a_0(t)|^2 = \frac{|s|^2}{4\hbar^2\Omega^2}\sin^2\Omega t$$

widzimy, że funkcja falowa $|\psi\rangle$ pod wpływem zmiennego w czasie zaburzenia o charakterze monochromatycznej fali płaskiej oscyluje między stanami $|0\rangle$ i $|1\rangle$ z częstością Ω. Warto zauważyć, że częstość oscylacji Rabiego zależy od odległości od rezonansu $(\omega - \omega_0)$ oraz amplitudy przyłożonego pola $\mathscr{E}$ ukrytej w s. Widzimy również, że przy częstości zmian pola równej częstości rezonansowej ω_0, stała $\frac{|s|^2}{4\hbar^2\Omega^2}$ upraszcza się do jedynki.