Uogólniony związek spinu ze statystyką

Mariusz Adamski

Rozważmy dwie identyczne cząstki ze spinem, obrócone o π względem siebie. Ich wspólna funkcja falowa ma postać

$$\mathrm{Rot}(\pi)|\psi(x)\rangle|\psi(-x)\rangle;$$

$|\psi(x)\rangle$ jest spinorem opisującym cząstkę w punkcie x. Po obrocie o kąt π wokół początku układu współrzędnych, co jest równoważne zamianie cząstek, x i $-x$ zamienią się miejscami i oba spinory zostaną obrócone o dodatkowe π:

$$\mathrm{Rot}(2\pi)|\psi(-x)\rangle\mathrm{Rot}(\pi)|\psi(x)\rangle.$$

To oznacza, że można sprowadzić pojedynczą zamianę cząstek do obrotu jednej z nich o 2π. W przypadku przestrzeni trój- i więcej wymiarowej $\mathrm{Rot}(2\pi)|\psi(x)\rangle = \pm|\psi(x)\rangle$, ponieważ podwójna zamiana cząstek musi pozostawiać układ bez zmian. Jest tak dlatego, że jest ona równoważna zatoczeniu pętli jedną cząstką wokół drugiej, a w przestrzeniach o liczbie wymiarów większej od dwóch, taka pętla jest homotopiczna z nie robieniem niczego (poprzez ciągłą transformację można taką pętlę przekształcić w dowolnie małą pętlę, wewnątrz której nie będzie już drugiej cząstki).

Obrót $\mathrm{Rot}(\varphi)$ jest generowany przez operator rzutu spinu na oś obrotu (oznaczony przez $\hat{s}$)

$$\mathrm{Rot}(\varphi) = \exp(i\varphi\hat{s}).$$

Jeśli cząstka jest w stanie własnym operatora $\hat{s}$ o wartości własnej s, to widać, że

$$\mathrm{Rot}(\varphi)|\psi_s\rangle = \exp(i\varphi\hat{s})|\psi_s\rangle = \exp(is\varphi)|\psi_s\rangle,$$

więc w takiej przestrzeni rzut spinu każdej cząstki musi być całkowitą wielokrotnością $\frac{1}{2}$.

Co więcej, jeśli cząstka nie jest w stanie własnym operatora rzutu spinu, można jej stan zapisać jako liniową kombinację stanów własnych $|\psi_k\rangle$, tak że

$$|\psi\rangle = \sum_k a_k|\psi_k\rangle,$$

gdzie $a_k = \langle\psi_k|\psi\rangle$ oraz (zakładamy, że a_k nie zmieniają się w czasie obrotu)

$$\mathrm{Rot}(\varphi)|\psi\rangle = \exp(i\varphi\hat{s})\sum_k a_k|\psi_k\rangle = \sum_k a_k\exp(is_k\varphi)|\psi_k\rangle.$$

Jeśli teraz położyć $\varphi = 2\pi$, to aby spełnić wymóg $\mathrm{Rot}(2\pi)|\psi\rangle = \pm|\psi\rangle$ koniecznym jest, aby wszystkie $s_k \in \mathbb{Z}$ (dla znaku „+") lub $s_k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ (dla znaku „−"). Zatem cząstki o całkowitym rzucie spinu są symetryczne względem pojedynczej zamiany ich miejscami, co oznacza, że podlegają statystyce Bosego-Einsteina (bozony), natomiast cząstki o połówkowym rzucie spinu są antysymetryczne i podlegają statystyce Fermiego-Diraca (fermiony). Stanowi to treść twierdzenia o związku spinu ze statystyką.

Przestrzeń dwuwymiarowa natomiast stanowi przypadek szczególny, ponieważ pętla zatoczona jedną cząstką wokół drugiej nie jest homotopiczna z nierobieniem niczego, więc rozumowanie przedstawione w pierwszej części nie funkcjonuje w takiej przestrzeni. Nie ma zatem ograniczenia na rzut spinu cząstek.

Rozważmy dwa przypadki.

1. Całkowita polaryzacja spinowa (np. w silnych polach magnetycznych). Jeżeli rozważane cząstki są w stanie własnym operatora rzutu spinu, to pojedyncza zamiana ich miejscami powoduje pojawienie się czynnika fazowego $\exp(2is\pi)$, gdyż
$$\mathrm{Rot}(2\pi)|\psi\rangle = \exp(2i\pi\hat{s})|\psi\rangle = \exp(2is\pi)|\psi\rangle.$$
2. Identyczne cząstki nie będące w stanie własnym operatora rzutu spinu. W takim przypadku, tak jak poprzednio, możemy stan każdej cząstki zapisać jako liniową kombinację stanów własnych oraz
$$\mathrm{Rot}(2\pi)|\psi\rangle = \exp(2i\pi\hat{s})\sum_k a_k|\psi_k\rangle = \sum_k a_k\exp(2is_k\pi)|\psi_k\rangle.$$
Widać, że w tym przypadku bez dodatkowych ograniczeń na $\{s_k\}$, pojedyncza zamiana cząstek wiąże się z arbitralnym obrotem stanu w przestrzeni Hilberta.