Zasady zachowania, równanie Naviera-Stokesa

Mariusz Adamski

1. Zasady zachowania.

Znaczna część fizyki, a w szczególności fizyki klasycznej, opiera się na sformułowaniach wypływających z zasad zachowania. Chodzi tu o stwierdzenia tak ważne, jak na przykład: masa nie może powstawać z niczego ani też znikać; pęd jest zawsze zachowany; całkowity ładunek elektryczny jest niezmiennikiem.

Równania różniczkowe cząstkowe, jakie powstają w wyniku zastosowania takich koncepcji, same z kolei nazywane są zachowawczymi. Omówimy kilka konkretnych przykładów naświetlających podejście.

1.1. Zachowanie masy.

Aby masa w objętości V była zachowana, koniecznym jest, aby szybkość jej zmian w tej objętości była równa strumieniowi masy, przecinającemu powierzchnię S ograniczającą objętość V. Innymi słowy:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \varrho \mathrm{d}V = -\oiint\limits_S \varrho \mathbf{u} \cdot \mathbf{dS},$$

gdzie $\varrho(\mathbf{r}, t)$ jest gęstością masy, a $\mathbf{u} = \langle \mathbf{v} \rangle$.

Korzystając teraz z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego dla drugiej całki dostajemy:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial \varrho}{\partial t} \varrho \mathrm{d}V = - \iiint\limits_V \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) \mathrm{d}V,$$

zatem

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) = 0.$$

1.2. Zachowanie pędu.

Rozważmy zachowanie pędu w kierunku i. Całkowity pęd w kierunku i w objętości V wynosi

$$\iiint\limits_V \varrho u_i \mathrm{d}V.$$

Składowa i pędu w objętości V rośnie w czasie dzięki działaniu siły zewnętrznej $\mathbf{F}$ w kierunku i oraz konwekcji pędu:

$$\iiint\limits_V \varrho \frac{F_i}{m} \mathrm{d}V - \oiint\limits_S \langle \varrho v_i \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{dS},$$

co prowadzi do równania:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_V \varrho u_i \mathrm{d}V = \iiint\limits_V \varrho \frac{F_i}{m} \mathrm{d}V - \oiint\limits_S \langle \varrho v_i \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{dS}.$$

Ponownie korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego dla ostatniej całki otrzymujemy relację:

$$\frac{\partial(\varrho u_i)}{\partial t} = \varrho\frac{F_i}{m} - \nabla\cdot\langle\varrho v_i \mathbf{v}\rangle.$$

Zauważmy, że:

$$\langle v_i v_j\rangle = \langle(v_i-u_i)(v_j-u_j)\rangle + \langle v_i\rangle u_j + u_i\langle v_j\rangle - u_i u_j = \langle(v_i-u_i)(v_j-u_j)\rangle + u_i u_j$$

Definiując tensor ciśnienia $P_{ij} = \varrho\langle(v_i-u_i)(v_j-u_j)\rangle$ i przepisując równanie na postać wektorową otrzymujemy:

$$\frac{\partial(\varrho\mathbf{u})}{\partial t} = \frac{\varrho}{m}\mathbf{F} - \nabla\cdot(\hat{P} + \varrho\mathbf{u}\mathbf{u})$$

1.3. Twierdzenie o zachowaniu.

Twierdzenie o zachowaniu orzeka, że jeżeli χ jest dowolną wielkością zachowaną, to zachodzi

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n\chi\rangle + \frac{\partial}{\partial x_i}\langle nv_i\chi\rangle - n\left\langle v_i\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\right\rangle - \frac{n}{m}\left\langle F_i\frac{\partial\chi}{\partial v_i}\right\rangle - \frac{n}{m}\left\langle\frac{\partial F_i}{\partial v_i}\chi\right\rangle = 0,$$

gdzie $n(\mathbf{r},t) = \int f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\mathrm{d}^3v$, f – funkcja rozkładu. Jeśli założymy, że siły zewnętrzne nie zależą od prędkości, to ostatni wyraz możemy pominąć. Przy takich oznaczeniach oczywiście $\varrho(\mathbf{r},t) = mn(\mathbf{r},t)$.

Twierdzenie o zachowaniu wynika wprost z równania kinetycznego Boltzmanna. Jeśli pomnożymy obie strony tego równania przez χ i scałkujemy po $\mathbf{v}$ otrzymamy

$$\int \mathrm{d}^3 v \chi(\mathbf{r},\mathbf{v}) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{m} F_i \frac{\partial}{\partial v_i} \right) f(\mathbf{r},\mathbf{v}) = \int \mathrm{d}^3 v \chi \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\mathrm{zderz}} .$$

Jednakże z definicji całki zderzeń

$$\int \mathrm{d}^3 v \chi \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\mathrm{zderz}} = \int \mathrm{d}^3 v_1 \int \mathrm{d}^3 v_2 \int \mathrm{d}\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1| \chi_1 (f_1' f_2' - f_2 f_1).$$

Całka ta nie ulegnie zmianie, jeśli w funkcji podcałkowej przestawimy $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ ponieważ przekrój czynny $\sigma(\Omega)$ jest niezmienniczy względem tego przestawienia. Nie ulegnie zmianie również przy przestawieniu $\mathbf{v}_1 \leftrightarrow \mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2 \leftrightarrow \mathbf{v}_2'$.

Dodając tak otrzymane całki i dzieląc wynik przez 4 dostajemy:

$$\int \mathrm{d}^3 v \chi \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{zderz}} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \mathrm{d}^3 v_1 \int \mathrm{d}^3 v_2 \int \mathrm{d}\Omega \sigma(\Omega)|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|(f_1' f_2' - f_2 f_1)(\chi_1 + \chi_2 - \chi_1' - \chi_2') \equiv 0.$$

Zatem

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \mathrm{d}^3 v \chi f + \frac{\partial}{\partial x_i}\int \mathrm{d}^3 v \chi v_i f - \int \mathrm{d}^3 v \frac{\partial \chi}{\partial x_i} v_i f + \frac{1}{m}\int \mathrm{d}^3 v \frac{\partial}{\partial v_i}(\chi F_i f) +$$

$$-\frac{1}{m}\int \mathrm{d}^3 v \frac{\partial \chi}{\partial v_i} F_i f - \frac{1}{m}\int \mathrm{d}^3 v \chi \frac{\partial F_i}{\partial v_i} f = 0$$

Czwarty wyraz znika, jeśli założymy znikanie $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ przy $|\mathbf{v}| \to \infty$.
Definiując wartość średnią

$$\langle A \rangle = \frac{\int \mathrm{d}^3 v A f}{\int \mathrm{d}^3 v f} = \frac{1}{n}\int \mathrm{d}^3 v A f$$

otrzymujemy poszukiwane twierdzenie o zachowaniu.

1.4. Zachowanie energii.

Dla odmiany równanie opisujące zasadę zachowania energii wyprowadzimy z twierdzenia o zachowaniu. W tym celu weźmy $\chi = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2$, co odpowiada energii kinetycznej ruchu cieplnego. Wtedy

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\langle \varrho|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2\rangle + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\langle \varrho v_i|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2\rangle - \frac{1}{2}\varrho\left\langle v_i \frac{\partial}{\partial x_i}|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2\right\rangle = 0.$$

Zdefiniujemy temperaturę $kT \equiv \theta = \frac{1}{3}m\langle|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2\rangle$ i gęstość strumienia cieplnego jako $\mathbf{q} = \frac{1}{2}m\varrho\langle(\mathbf{v}-\mathbf{u})|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2\rangle$. Mamy wtedy

$$\frac{1}{2}m\varrho\langle v_i|\mathbf{v}-\mathbf{v}|^2\rangle = \frac{1}{2}m\varrho\langle(v_i-u_i)|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2\rangle + \frac{1}{2}m\varrho u_i\langle|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2\rangle = q_i + \frac{3}{2}\varrho\theta u_i$$

i

$$\varrho\langle v_i(v_j-u_j)\rangle = \varrho\langle(v_i-u_i)(v_j-u_j)\rangle + \varrho u_i\langle v_j-u_j\rangle = P_{ij}.$$

Zatem równanie na zachowanie energii możemy zapisać jako

$$\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varrho\theta) + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(\varrho\theta u_i) + mP_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0.$$

Ponieważ $P_{ij} = P_{ji}$

$$mP_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = P_{ij}\frac{m}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \equiv P_{ji}\Lambda_{ij}.$$

Zauważając, że $\frac{\partial(\varrho\theta)}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla(\varrho\theta) = \frac{\mathrm{d}(\varrho\theta)}{\mathrm{d}t}$ możemy ostatecznie zapisać

$$\frac{\mathrm{d}(\varrho\theta)}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3}\nabla\cdot\mathbf{q} - \frac{2}{3}\hat{P}:\hat{\Lambda} - \varrho\theta\nabla\cdot\mathbf{u}$$

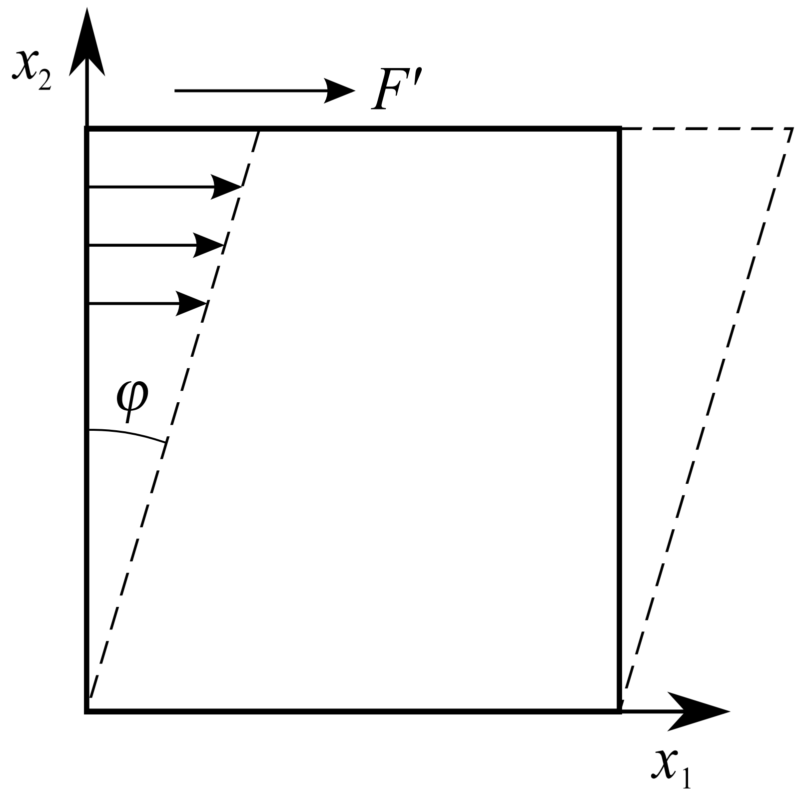
2. Równanie Naviera-Stokesa

Zakładając, że rozważany ośrodek (płyn) jest izotropowy, tak że nie ma różnicy między osiami x_1, x_2, x_3, powinno być $P_{11} = P_{22} = P_{33} \equiv p$, gdzie p jest z definicji ciśnieniem hydrostatycznym. Stąd ogólnie $\hat{P}$ można zapisać jako:

$$\hat{P} = p\hat{I} + \hat{P}',$$

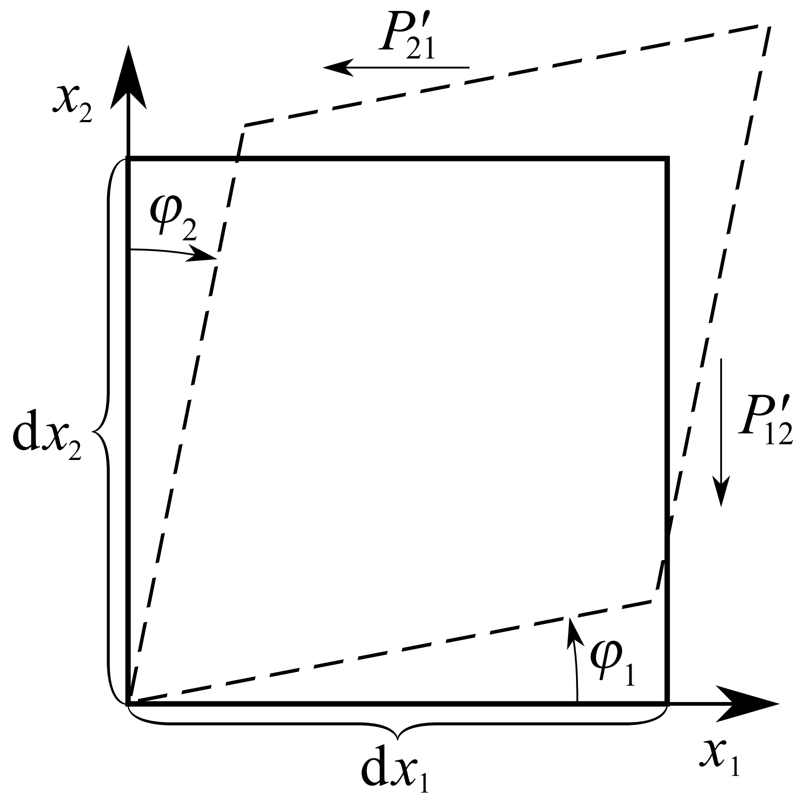
gdzie $\hat{P}'$ jest tensorem bezśladowym.

Wprowadzimy teraz do $\hat{P}'$ empiryczny związek między siłą ścinającą działającą na element płynu i szybkością odkształcania tego elementu. Siła ścinająca F' na jednostkę powierzchni, działająca równolegle do ściany sześcianu płynu, dąży do rozciągnięcia sześcianu w równoległościan z szybkością odpowiadającą $F' = \mu \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, gdzie μ jest współczynnikiem lepkości.



Rozważmy teraz wpływ P'_{12} na określony element cieczy:

$$P'_{12} = -\mu \left(\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t} \right) = -\mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right).$$



W ogólnym wypadku mamy

$$P'_{ij} = -\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \ i \neq j.$$

Aby tensor $\hat{P}'$ był bezśladowy, musimy przyjąć, że

$$P'_{ij} = -\mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] \equiv -\mu \hat{U},$$

gdzie $\hat{U}$ to tensor Naviera-Stokesa. Możemy teraz zapisać ogólnie równanie ruchu dla cieczy ściśliwej:

$$\frac{\partial (\varrho \mathbf{u})}{\partial t} = \frac{\varrho}{m} \mathbf{F} - \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}\mathbf{u} + p\hat{I} - \mu \hat{U})$$

Aby otrzymać równanie cieczy nieściśliwej, musimy położyć $\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\varrho = 0$. Wtedy równanie ciągłości

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \nabla\cdot(\varrho\mathbf{u}) = \underbrace{\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\varrho}_{=0} + \varrho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0,$$

co implikuje $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$.

Przy założeniu nieściśliwości, dywergencja tensora Naviera-Stokesa

$$\nabla\cdot\hat{U} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}\right) = \nabla^2\mathbf{u},$$

a dywergencja diady $\varrho\mathbf{uu}$

$$\nabla\cdot(\varrho\mathbf{uu}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\varrho u_i u_j) = \underbrace{\varrho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i}}_{=0} + u_i \frac{\partial(\varrho u_j)}{\partial x_i} = (\mathbf{u}\cdot\nabla)(\varrho\mathbf{u}),$$

oraz oczywiście

$$\nabla\cdot(p\hat{I}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p\delta_{ij}) = \delta_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_i} = \nabla p.$$

Uwzględniając powyższe relacje można zapisać

$$\frac{\partial(\varrho \mathbf{u})}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\varrho \mathbf{u}) = \frac{\varrho}{m}\mathbf{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

i równanie Naviera-Stokesa dla płynu nieściśliwego przybiera postać

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{F}}{m} - \frac{1}{\varrho}\nabla p + \frac{\mu}{\varrho}\nabla^2 \mathbf{u}.$$

Bibliografia

[1] *Mechanika statystyczna* – K. Huang

[2] *Metody obliczeniowe fizyki* – D. Potter

[3] *Podstawy mechaniki płynów* – R. Gryboś