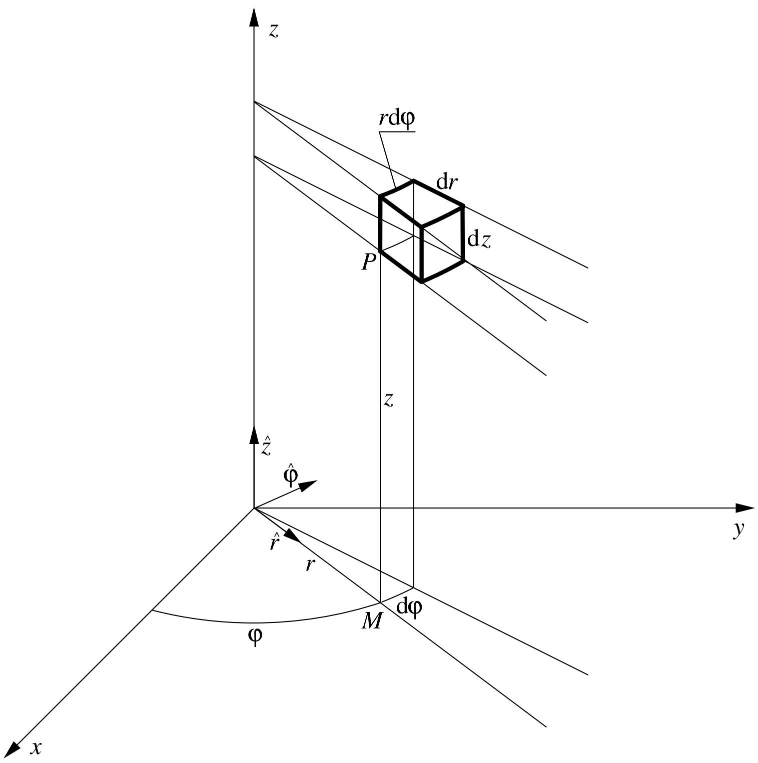
Funkcje pola we współrzędnych krzywoliniowych cd.

Mariusz Adamski

1. Współrzędne walcowe.

Definicja. Jeżeli M jest rzutem punktu P na płaszczyznę xy, a r i φ są współrzędnymi biegunowymi M, to zmienne $u = r$, $v = \varphi$, $w = z$ nazywamy współrzędnymi walcowymi P.



Między współrzędnymi walcowymi a kartezjańskimi istnieje następujący związek:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}.$$

Ortogonalność. Jeżeli ustalimy współrzędną r, to otrzymamy powierzchnię boczną walca o osi głównej pokrywającej się z osią z. Jeżeli następnie ustalimy φ pozostawiając pozostałe współrzędne zmienne, otrzymamy półpłaszczyznę zawierającą oś z. Oczywiście obie te powierzchnie są prostopadłe. Jeżeli natomiast ustalimy z, to dostaniemy płaszczyznę równoległą do xy, która jest prostopadła do w/w powierzchni. Zatem wszystkie powierzchnie utworzone przez ustalenie jednej ze współrzędnych są prostopadłe. Wynika z powyższego, że współrzędne walcowe są ortogonalne.

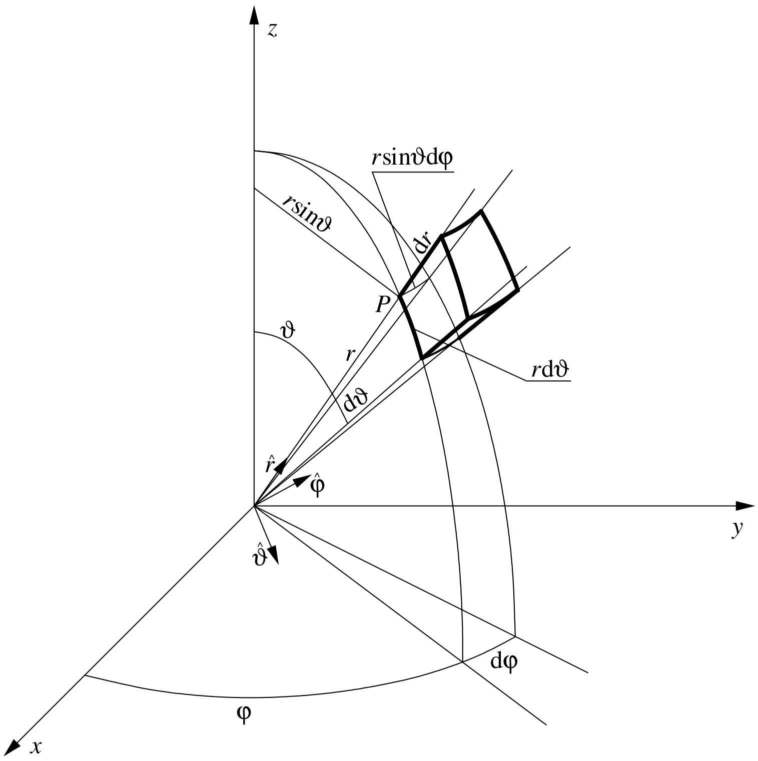
Współczynniki Lamego. Przyrosty skalarne wektora wodzącego w kierunkach wersorów $\hat{r}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{z}$ są równe odpowiednio $\mathrm{d}s_r = \mathrm{d}r$, $\mathrm{d}s_\varphi = r\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}s_z = \mathrm{d}z$. Zatem

$$\mathrm{d}\bar{r} = \hat{r}\mathrm{d}s_r + \hat{\varphi}\mathrm{d}s_\varphi + \hat{z}\mathrm{d}s_z = \hat{r}U\mathrm{d}r + \hat{\varphi}V\mathrm{d}\varphi + \hat{z}W\mathrm{d}z,$$

gdzie U, V, W to współczynniki Lamego. Z równości tej wynika postać współczynników Lamego układu walcowego: $U = 1$, $V = r$, $W = 1$. Element objętości we współrzędnych walcowych $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}s_r\mathrm{d}s_\varphi\mathrm{d}s_z = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$.

2. Współrzędne sferyczne.

Definicja. Współrzędnymi sferycznymi punktu P nazywamy zmienne $u = r$, $v = \vartheta$, $w = \varphi$ takie, że r - odległość P od początku układu współrzędnych, ϑ - kąt pomiędzy promieniem OP a dodatnią częścią osi z, φ - kąt pomiędzy płaszczyzną zawierającą punkt P i oś z a dodatnią częścią osi x.



Między współrzędnymi sferycznymi a kartezjańskimi istnieje następujący związek:

$$\begin{cases} x = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\vartheta \end{cases} .$$

Ortogonalność. Jeżeli ustalimy współrzędną r to otrzymamy sferę o środku w początku układu. Jeżeli natomiast ustalimy ϑ to otrzymamy powierzchnię boczną stożka o wierzchołku w $(0,0,0)$, która jest oczywiście prostopadła do powierzchni sfery. Jeżeli następnie ustalimy φ to dostaniemy półpłaszczyznę zawierającą oś z. Płaszczyżna ta jest prostopadła zarówno do sfery, jak i do stożka. Z powyższego wynika, że współrzędne sferyczne są ortogonalne.

Współczynniki Lamego. Przyrosty skalarne wektora wodzącego w kierunku wersorów $\hat{r}$, $\hat{\vartheta}$, $\hat{\varphi}$ są równe odpowiednio $\mathrm{d}s_r = \mathrm{d}r$, $\mathrm{d}s_\vartheta = r\mathrm{d}\vartheta$, $\mathrm{d}s_\varphi = r\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi$. Zatem współczynniki Lamego $U = 1$, $V = r$, $W = r\sin\vartheta$. Elemnet objętości we współrzędnych sferycznych $\mathrm{d}\tau = r^2\sin\vartheta\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$.

3. Operatory różniczkowe we współrzędnych krzywoliniowych.

Gradient we współrzędnych krzywoliniowych. Jeżeli u, v, w są ortogonalnymi współrzędnymi krzywoliniowymi, to przyrost funkcji skalarnej $\Phi(u,v,w)$ można zapisać jako

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial\Phi}{\partial v}\mathrm{d}v + \frac{\partial\Phi}{\partial w}\mathrm{d}w,$$

natomiast przyrost wektora wodzącego

$$\mathrm{d}\bar{r} = \frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\mathrm{d}v + \frac{\partial\bar{r}}{\partial w}\mathrm{d}w = \hat{t}_1U\mathrm{d}u + \hat{t}_2V\mathrm{d}v + \hat{t}_3W\mathrm{d}w,$$

gdzie $\hat{t}_1$, $\hat{t}_2$, $\hat{t}_3$ są wersorami osi odpowiednio u, v, w, a $U = |\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}|$, $V = |\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}|$, $W = |\frac{\partial\bar{r}}{\partial w}|$ to współczynniki Lamego. Mając powyższe na wzlędzie można zapisać różniczkę zupełną Φ w postaci

$$\mathrm{d}\Phi = \left(\frac{\hat{t}_1}{U}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{\hat{t}_2}{V}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \frac{\hat{t}_3}{W}\frac{\partial\Phi}{\partial w}\right)\circ\left(\hat{t}_1U\mathrm{d}u + \hat{t}_2V\mathrm{d}v + \hat{t}_3W\mathrm{d}w\right) = \left(\frac{\hat{t}_1}{U}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{\hat{t}_2}{V}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \frac{\hat{t}_3}{W}\frac{\partial\Phi}{\partial w}\right)\circ\mathrm{d}\bar{r}.$$

Ponieważ $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\bar{r}} = \nabla\Phi$, mamy

$$\nabla\Phi = \frac{\hat{t}_1}{U}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{\hat{t}_2}{V}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \frac{\hat{t}_3}{W}\frac{\partial\Phi}{\partial w}.$$

Zatem operator ∇ we współrzędnych krzywoliniowych jest postaci

$$\nabla = \frac{\hat{t}_1}{W}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\hat{t}_2}{V}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\hat{t}_3}{W}\frac{\partial}{\partial w}.$$

Mnożąc różniczkę zupełną wektora wodzącego $\mathrm{d}\bar{r}$ kolejno przez ∇u, ∇v oraz ∇w można otrzymać zależności typu

$$\mathrm{d}\bar{r}\circ\nabla u = \frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\circ\nabla u\mathrm{d}u.$$

Z drugiej jednak strony $\mathrm{d}\bar{r}\circ\nabla u = \mathrm{d}u$, ponieważ jest to rzut przyrostu $\mathrm{d}\bar{r}$ na kierunek wzrostu u. Ostatecznie otrzymujemy relacje

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\circ\nabla u = 1 \\ \frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\circ\nabla v = 1 \\ \frac{\partial\bar{r}}{\partial w}\circ\nabla w = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \nabla u = \frac{\hat{t}_1}{U} \\ \nabla v = \frac{\hat{t}_2}{V} \\ \nabla w = \frac{\hat{t}_3}{W} \end{array}\right. .$$

Przy takich oznaczeniach operator ∇ można zapisać

$$\nabla = \nabla u\frac{\partial}{\partial u} + \nabla v\frac{\partial}{\partial v} + \nabla w\frac{\partial}{\partial w}.$$

Dywergencja we współrzędnych krzywoliniowych. Wektor $\bar{A}$ we współrzędnych krzywoliniowych u, v, w można zapisać jako $\bar{A} = A_u\hat{t}_1 + A_v\hat{t}_2 + A_w\hat{t}_3$, gdzie A_u, A_v, A_w to rzuty wektora $\bar{A}$ na kierunki wersorów odpowiednio $\hat{t}_1$, $\hat{t}_2$, $\hat{t}_3$. Jeżeli wersory te zapiszemy w postaci

$$\begin{cases} \hat{t}_1 = \hat{t}_2 \times \hat{t}_3 = VW\nabla v \times \nabla w \\ \hat{t}_2 = \hat{t}_3 \times \hat{t}_1 = WU\nabla w \times \nabla u \\ \hat{t}_3 = \hat{t}_1 \times \hat{t}_2 = UV\nabla u \times \nabla v \end{cases}$$

to wektor $\bar{A} = (VWA_u)\nabla v \times \nabla w + (WUA_v)\nabla w \times \nabla u + (UVA_w)\nabla u \times \nabla v$. Taki zapis wektora $\bar{A}$ jest przydatny dlatego, że dywergencja członów postaci $\nabla v \times \nabla w$ jest równa 0, co udowodnimy kożystając z notacji sumacyjnej:

$$\operatorname{div}(\nabla v \times \nabla w) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varepsilon_{ijk}\nabla v_j \nabla w_k\right) = \varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla v_j\right)\nabla w_k + \varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\nabla w_k\right)\nabla v_j.$$

Dokonując zmiany indeksów w pierwszej sumie cyklicznie, a w drugiej zamieniając miejscami i i j otrzymujemy

$$\varepsilon_{jki}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\nabla v_k\right)\nabla w_i + \varepsilon_{jik}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\nabla w_k\right)\nabla v_i = \left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\nabla v_k\right)\nabla w_i - \left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\nabla w_k\right)\nabla v_i,$$

ale $\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\nabla v_k = (\operatorname{rot}\operatorname{grad} v)_i = 0$, a $\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\nabla w_k = (\operatorname{rot}\operatorname{grad} w)_i = 0$, zatem obie sumy znikają. Kożystając z powyższego można dywergencję $\bar{A}$ zapisać jako

$$\operatorname{div}\bar{A} = \nabla\circ\bar{A} = \Big(\nabla(VWA_u)\Big)\circ(\nabla v \times \nabla w) + \Big(\nabla(WUA_v)\Big)\circ(\nabla w \times \nabla u) + \Big(\nabla(UVA_w)\Big)\circ(\nabla u \times \nabla v).$$

Pierwszy składnik po uwzględnieniu ∇ we współrzędnych krzywoliniowych:

$$\begin{aligned}\Big(\nabla(VWA_u)\Big)\circ(\nabla v \times \nabla w) &= \left(\frac{\partial}{\partial u}(VWA_u)\nabla u + \frac{\partial}{\partial v}(VWA_u)\nabla v + \frac{\partial}{\partial w}(VWA_u)\nabla w\right)\circ(\nabla v \times \nabla w) = \\ &= \frac{\partial}{\partial u}(VWA_u)(\nabla u \circ \nabla v \times \nabla w).\end{aligned}$$

Postępując podobnie z pozostałymi składnikami sumy oraz zauważając, że $\nabla u\circ\nabla v\times\nabla w = \frac{1}{UVW}$ jako objętość prostopadłościanu rozpiętego na wektorach ∇u, ∇v, ∇w otrzymujemy ostatecznie

$$\operatorname{div}\bar{A} = \frac{1}{UVW}\left(\frac{\partial}{\partial u}(VWA_u) + \frac{\partial}{\partial v}(WUA_v) + \frac{\partial}{\partial w}(UVA_w)\right).$$

Rotacja we współrzędnych krzywoliniowych. Zapisując wektor $\bar{A}$ w postaci $\bar{A} = A_u\hat{t}_1 + A_v\hat{t}_2 + A_w\hat{t}_3 = UA_u\nabla u + VA_v\nabla v + WA_w\nabla w$ i uwzględniając $\operatorname{rot}\nabla u = \operatorname{rot}\nabla v = \operatorname{rot}\nabla w = 0$, mamy

$$\operatorname{rot}\bar{A} = \nabla\times\bar{A} = \Big(\nabla(UA_u)\Big)\times\nabla u + \Big(\nabla(VA_v)\Big)\times\nabla v + \Big(\nabla(WA_w)\Big)\times\nabla w.$$

Rozpiszmy pierwszy składnik tej sumy; otrzymamy:

$$\Big(\nabla(UA_u)\Big)\times\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial u}(UA_u)\nabla u + \frac{\partial}{\partial v}(UA_u)\nabla v + \frac{\partial}{\partial w}(UA_u)\nabla w\right)\times\nabla u.$$

Oczywiście $\frac{\partial}{\partial u}(UA_u)\nabla u\times\nabla u = 0$. Zatem

$$\frac{\partial}{\partial v}(UA_u)\nabla v\times\nabla u + \frac{\partial}{\partial w}(UA_w)\nabla w\times\nabla u = \frac{\partial}{\partial v}(UA_u)\frac{1}{VU}\hat{t}_2\times\hat{t}_1 + \frac{\partial}{\partial w}(UA_u)\frac{1}{WU}\hat{t}_3\times\hat{t}_1,$$

ale $\hat{t}_2 \times \hat{t}_1 = -\hat{t}_3$ oraz $\hat{t}_3 \times \hat{t}_1 = \hat{t}_2$:

$$\Big(\nabla(UA_u)\Big) \times \nabla u = \frac{\partial}{\partial w}(UA_u)\frac{1}{UW}\hat{t}_2 - \frac{\partial}{\partial v}(UA_u)\frac{1}{UV}\hat{t}_3.$$

Postępując podobnie można otrzymać analogiczne związki dla pozostałych czynników:

$$\begin{aligned}
\Big(\nabla(VA_v)\Big) \times \nabla v &= \frac{\partial}{\partial u}(VA_v)\frac{1}{UV}\hat{t}_3 - \frac{\partial}{\partial w}(VA_v)\frac{1}{WV}\hat{t}_1 \\
\Big(\nabla(WA_w)\Big) \times \nabla w &= \frac{\partial}{\partial v}(WA_w)\frac{1}{VW}\hat{t}_1 - \frac{\partial}{\partial u}(WA_w)\frac{1}{VW}\hat{t}_2.
\end{aligned}$$

Ostatecznie po pogrupowaniu wyrazów przy odpowiednich wersorach rotacja wektora $\bar{A}$ przybiera postać

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\bar{A} = \frac{\hat{t}_1}{VW}\left(\frac{\partial}{\partial v}(WA_w) - \frac{\partial}{\partial w}(VA_v)\right) &+ \frac{\hat{t}_2}{UW}\left(\frac{\partial}{\partial w}(UA_u) - \frac{\partial}{\partial u}(WA_w)\right) + \\
&+ \frac{\hat{t}_3}{UV}\left(\frac{\partial}{\partial u}(VA_v) - \frac{\partial}{\partial v}(UA_u)\right)
\end{aligned}$$

lub w bardziej zwięzłej postaci symbolicznego wyznacznika

$$\operatorname{rot}\bar{A} = \frac{1}{UVW}\begin{vmatrix} U\hat{t}_1 & V\hat{t}_2 & W\hat{t}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ UA_u & VA_v & WA_w \end{vmatrix}.$$

Laplasjan we współrzędnych krzywoliniowych. Laplasjan to dywergencja gradientu; zastosujemy więc wyprowadzone wyżej wzory na gradient i dywergencję we współrzędnych krzywoliniowych:

$$\begin{aligned}
\triangle\Phi \equiv \nabla^2\Phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi &= \operatorname{div}\left(\frac{\hat{t}_1}{U}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{\hat{t}_2}{U}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \frac{\hat{t}_1}{W}\frac{\partial\Phi}{\partial w}\right) = \\
&= \frac{1}{UVW}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{VW}{U}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{WU}{V}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{UV}{W}\frac{\partial\Phi}{\partial w}\right)\right).
\end{aligned}$$

Literatura

[1] *Zarys teorii tensorów i wektorów* - Edmund Karaśkiewicz