Zasada Fermata

Mariusz Adamski, Sebastian Michalik
Wydział Podstawowych Problemów Techniki
Politechniki Wrocławskiej

1. Definicja.

Zasada Fermata orzeka, że:
Promień świetlny poruszający się z punktu P do punktu Q podąża zawsze drogą, na której przebycie potrzeba lokalnie ekstremalnego czasu.

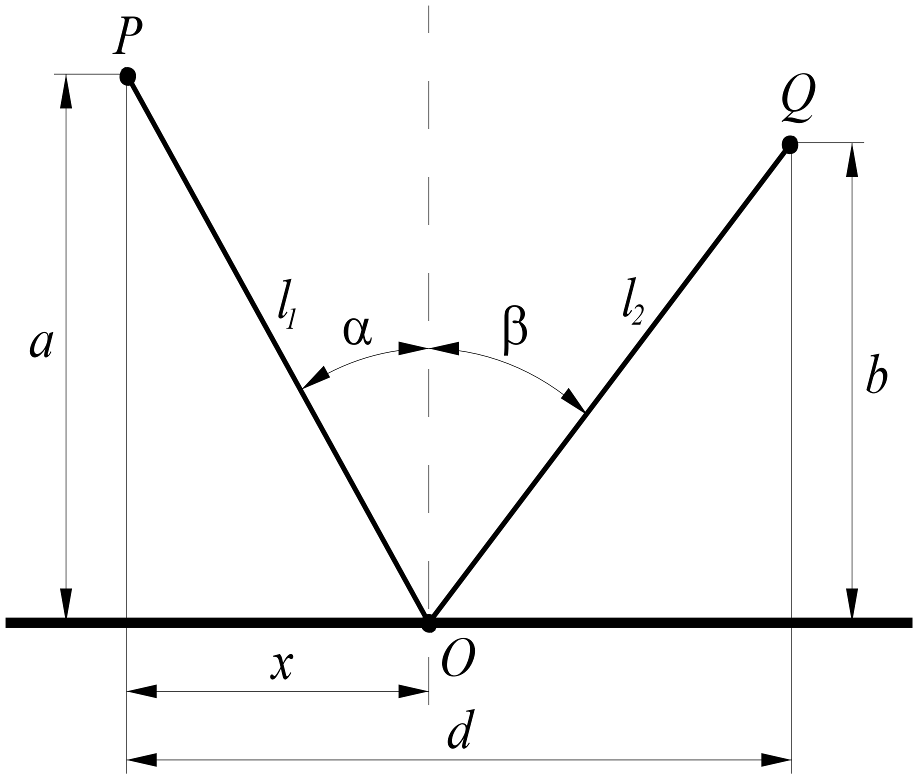
Sformułował ją w roku 1650 francuski matematyk Pierre de Fermat. Zasada ta jest przypadkiem szczególnym zasady Maupertuis najmniejszego działania.

Dla stałej częstości fali faza

$$\varphi = \int \bar{k}\mathrm{d}\bar{r} = \omega \int \frac{\hat{n}\mathrm{d}\bar{r}}{u},$$

gdzie $\bar{k}$ – wektor falowy, ω – częstość fali, $\hat{n}$ – wersor w kierunku rozprzestrzeniania się czoła fali, u – prędkość fazowa. Iloczyn $\hat{n}\mathrm{d}\bar{r}$ równy jest przemieszczeniu powierzchni stałej fazy w kierunku normalnym do tej powierzchni, więc $(\hat{n}\mathrm{d}\bar{r})/u$ jest czasem $\mathrm{d}t$, w którym to przemieszczenie zachodzi. Zgodnie z zasadą Maupertuis, którą faza powinna spełniać tak samo, jak działanie, czas ten powinien być ekstremalny.

2. Prawo odbicia.



Na początku zauważmy, że w jednorodnym, translacyjnie niezmienniczym ośrodku, w którym prędkość światła jest stała, drogą najkrótszego czasu jest prosta. Będziemy zakładać, że droga od punktu P do zwierciadła, normalna oraz droga od zwierciadła do punktu Q są współpłaszczyznowe.

Mamy:

$$l_1 = \sqrt{a^2 + x^2},$$
$$l_2 = \sqrt{b^2 + (d - x)^2}.$$

Zatem czas potrzebny na przebycie drogi

$$t = \frac{l_1 + l_2}{c} = \frac{1}{c}\left(\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2}\right) \quad (1)$$

Warunkiem koniecznym ekstremum czasu jest zerowanie się pierwszej wariacji:

$$\delta t = \frac{1}{c}\left(\frac{x\delta x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{-(d-x)\delta x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}\right) =$$

$$= \frac{\delta x}{c}\left(\frac{x}{l_1} - \frac{d-x}{l_2}\right) = \frac{\delta x}{c}\left(\sin\alpha - \sin\beta\right)$$

Zatem dostajemy:

$$\sin\alpha = \sin\beta,$$

ale ponieważ oba kąty są ostre, musi być:

$$\alpha = \beta,$$

co jest znanym prawem odbicia.

Pokażemy jeszcze, że droga odpowiadająca warunkowi $\alpha = \beta$ jest najmniejsza z możliwych. W tym celu policzymy drugą wariację wyrażenia (1):

$$\delta^2 t = \frac{\delta x}{c}\left(\frac{\delta x\sqrt{a^2+x^2} - x\frac{x\delta x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{a^2+x^2} + \right.$$

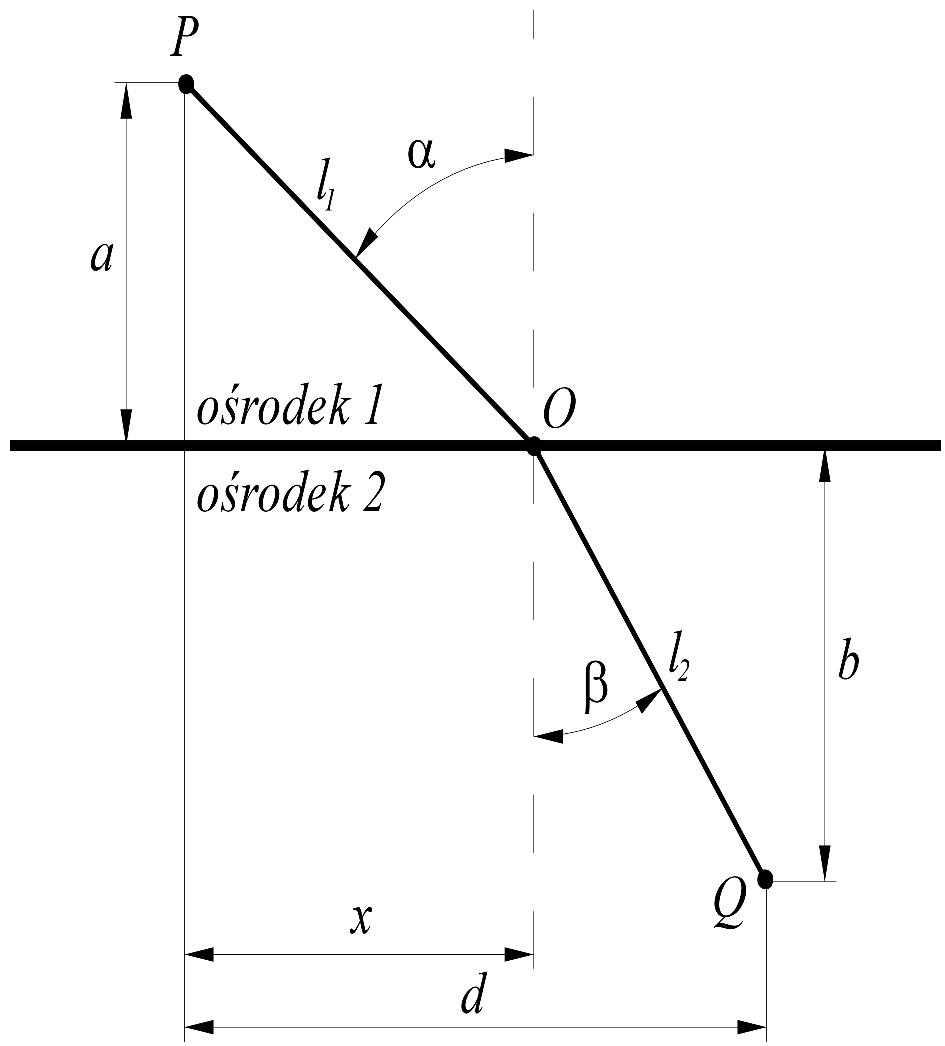
$$\left. - \frac{-\delta x\sqrt{b^2+(d-x)^2} - (b-x)\frac{-(d-x)\delta x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}}{b^2+(d-x)^2}\right) =$$

$$= \frac{\delta x^2}{c}\left(\frac{a^2}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^2}{\left(b^2+(d-x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) > 0$$

Zatem rzeczywiście mamy do czynienia z minimum czasu.

Zauważmy następnie, że gdyby punkt O leżał w odległości δy od płaszczyzny rysunku, pod pierwiastkami w wyrażeniu (1) należałoby dodać czynniki δy^2, co zwiększyłoby czas potrzebny na przebycie drogi. Założenie, że PO, OQ oraz normalna do powierzchni zwierciadła są współpłaszczyznowe było zatem słuszne.

3. Prawo załamania Snella.



Załóżmy, że w ośrodku 1 światło porusza się z prędkością $\frac{c}{n_1}$, a w ośrodku 2 z prędkością $\frac{c}{n_2}$.

Oczywiście, tak jak poprzednio

$$\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{a^2 + x^2}, \\ l_2 &= \sqrt{b^2 + (d-x)^2}, \end{aligned}$$

zatem czas potrzebny na przebycie drogi

$$t = \frac{1}{c}\left(n_1\sqrt{a^2+x^2} + n_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}\right). \qquad (2)$$

Podobnie jak poprzednio, policzymy pierwszą wariację t:

$$\begin{aligned} \delta t &= \frac{1}{c}\left(n_1\frac{x\delta x}{\sqrt{a^2+x^2}} + n_2\frac{-(d-x)\delta x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}\right) = \\ &= \frac{\delta x}{c}\left(n_1\frac{x}{l_1} - n_2\frac{d-x}{l_2}\right) \end{aligned}$$

W pobliżu toru o ekstremalnym czasie, δt powinno znikać, zatem:

$$\begin{aligned} n_1\frac{x}{l_1} &= n_2\frac{d-x}{l_2} \\ n_1\sin\alpha &= n_2\sin\beta, \end{aligned}$$

co reprezentuje znane prawo załamania Snella.

Literatura

[1] *Fizyka tom II* - D. Halliday, R. Resnick

[2] *Fizyka teoretyczna* - A. S. Kompaniejec